

Sadržaj

1. Uvodni dio	1
1.1. Pomoćni rezultati iz analize	2
2. Kratki uvod u linearnu algebru	11
2.1. Vektorski prostor	11
2.1.1. Osnovna svojstva vektorskog prostora	12
2.1.2. Norma u vektorskom prostoru	14
2.1.3. Skalarni produkt u vektorskom prostoru	15
2.1.4. Dimenzija vektorskog prostora	17
2.1.5. Baza vektorskog prostora	18
2.1.6. Linearni operatori	19
2.2. Matrice	21
2.2.1. Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom	22
2.2.2. Množenje matrica	23
2.2.3. Kompleksne matrice	27
2.2.4. Rang matrice	29
2.2.5. Sustav linearnih jednadžbi i inverz matrice	30
2.2.6. Lijevi i desni inverz, regularne i singularne matrice	31
2.2.7. Specijalne klase matrica	32
2.2.8. Vlastite vrijednosti i vektori	42
2.3. Singularna dekompozicija matrice	50
2.3.1. Definicija i osnovni teoremi	50
2.3.2. Izravne posljedice singularne dekompozicije	54
2.3.3. Aproksimacija matrice matricom manjeg ranga	57

2.3.4.	Wielandtova matrica	59
2.3.5.	Neke nejednakosti sa singularnim vrijednostima	61
2.3.6.	Generalizirani inverz	62
2.4.	Vektorske i matrice norme	65
2.4.1.	Vektorske norme	65
2.4.2.	Matrične norme	68
3.	Greške u numeričkom računanju	72
3.1.	Tipovi grešaka	72
3.1.1.	Greške zbog polaznih aproksimacija	72
3.1.2.	Greške zaokruživanja	74
3.1.3.	Apsolutna i relativna greška, značajne znamenke	76
3.2.	Aritmetika s pomičnom točkom	78
3.2.1.	Pretvaranje decimalne u binarnu reprezentaciju	78
3.2.2.	Reprezentacija brojeva u računalu	81
3.3.	IEEE Aritmetika	88
3.3.1.	Jednostruki format	89
3.3.2.	Dvostruki format	91
3.3.3.	BSPT i zaokruživanje u BSPT	93
3.3.4.	Korektno zaokružene osnovne računske operacije	97
3.3.5.	Implementacija operacija na računalu	99
3.3.6.	Drugi korijen, ostatak pri dijeljenju i konverzija formata	101
3.3.7.	Izuzeci	103
3.3.8.	Prekoračenje, potkoračenje i postupno potkoračenje	104
3.4.	Stabilnost numeričkog računanja	106
3.4.1.	Greške unazad i unaprijed	106
3.4.2.	Uvjetovanost	108
3.4.3.	Akumulacija grešaka zaokruživanja	109
3.4.4.	Kraćenje	114
3.4.5.	Kraćenje grešaka zaokruživanja	119
3.4.6.	Rješavanje kvadratne jednadžbe	121

3.4.7.	Kako dizajnirati stabilne algoritme	123
3.5.	Osnove analize grešaka zaokruživanja	124
3.5.1.	Propagiranje grešaka zaokruživanja	130
3.5.2.	Stabilnost produkta od n brojeva	133
3.5.3.	Stabilnost sume	137
3.5.4.	Kompenzirano sumiranje	140
3.5.5.	Stabilnost skalarnog produkta i osnovnih matričnih operacija	142
4.	Sustavi linearnih jednadžbi	145
4.1.	Vodič kroz ovo poglavlje	146
4.2.	Primjeri: Kako nastaje linearni sustav jednadžbi	147
4.3.	Gaussove eliminacije i trokutaste faktorizacije	150
4.3.1.	Matrični zapis metode eliminacija	151
4.3.2.	Trokutasti sustavi: rješavanje supstitucijama unaprijed i unazad	155
4.3.3.	LU faktorizacija	156
4.3.4.	LU faktorizacija s pivotiranjem	163
4.4.	Numerička svojstva Gaussovih eliminacija	171
4.4.1.	Analiza LU faktorizacije. Važnost pivotiranja.	172
4.4.2.	Analiza numeričkog rješenja trokutastog sustava	181
4.4.3.	Točnost izračunatog rješenja sustava	182
4.4.4.	Dodatak: Osnove matričnog računa na računalu	183
4.5.	Numeričko rješavanje simetričnog sustava jednadžbi	185
4.5.1.	Pozitivno definitni sustavi. Faktorizacija Choleskog	186
4.6.	Teorija perturbacija za linearne sustave	192
4.6.1.	Perturbacije male po normi	194
4.6.2.	Rezidualni vektor i stabilnost	196
4.6.3.	Perturbacije po elementima	197
4.6.4.	Dodatak: Udaljenost matrice do skupa singularnih matrica	200
4.7.	Iterativne metode	201
4.7.1.	Jacobijeva i Gauss–Seidelova metoda	203

4.8.	Matematički software za problem $Ax = b$	207
4.8.1.	Pregled biblioteke BLAS	208
4.8.2.	Pregled biblioteke LAPACK	212
4.8.3.	Rješavanje linearnih sustava pomoću LAPACK-a	213
5.	Računanje vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora	220
6.	Izvednjavanje funkcija	221
6.1.	Hornerova shema	223
6.1.1.	Računanje vrijednosti polinoma u točki	224
6.1.2.	Hornerova shema je optimalan algoritam	225
6.1.3.	Stabilnost Hornerove sheme	227
6.1.4.	Dijeljenje polinoma linearnim faktorom oblika $x - x_0$	228
6.1.5.	Potpuna Hornerova shema	230
6.1.6.	“Hornerova shema” za interpolacijske polinome	231
6.1.7.	Hornerova shema za realni polinom i kompleksni argument	232
6.1.8.	Računanje parcijalnih derivacija kompleksnog polinoma	236
6.2.	Generalizirana Hornerova shema	238
6.2.1.	Izvednjavanje rekurzivno zadanih funkcija	240
6.2.2.	Izvednjavanje Fourierovih redova	244
6.2.3.	Klasični ortogonalni polinomi	248
6.3.	Stabilnost rekurzija i generalizirane Hornerove sheme	254
6.4.	Besselove funkcije i Millerov algoritam	256
6.4.1.	Opća forma Millerovog algoritma	256
6.4.2.	Izvednjavanje Besselovih funkcija	257
6.5.	Asimptotski razvoj	265
6.6.	Verižni razlomci i racionalne aproksimacije	274
6.6.1.	Brojevi verižni razlomci	275
6.6.2.	Uzlazni algoritam za izvednjavanje brojevnih verižnih razlomaka	276
6.6.3.	Eulerova forma verižnih razlomaka i neki teoremi konvergencije	280

6.6.4.	Silazni algoritam za izvrednjavanje brojevnih verižnih razlomaka	284
6.6.5.	Funkcijski verižni razlomci	284
7.	Aproksimacija i interpolacija	288
7.1.	Opći problem aproksimacije	288
7.1.1.	Linearne aproksimacijske funkcije	289
7.1.2.	Nelinearne aproksimacijske funkcije	290
7.1.3.	Kriteriji aproksimacije	290
7.2.	Interpolacija polinomima	293
7.2.1.	Egzistencija i jedinstvenost interpolacijskog polinoma	294
7.2.2.	Kako naći prave algoritme?	295
7.2.3.	Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma	301
7.2.4.	Ocjena greške interpolacijskog polinoma	302
7.2.5.	Newtonov oblik interpolacijskog polinoma	304
7.2.6.	Koliko je dobar interpolacijski polinom?	308
7.2.7.	Konvergencija interpolacijskih polinoma	345
7.2.8.	Hermiteova i druge interpolacije polinomima	346
7.3.	Interpolacija po dijelovima polinomima	351
7.3.1.	Po dijelovima linearna interpolacija	352
7.3.2.	Po dijelovima kubična interpolacija	354
7.3.3.	Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija	358
7.3.4.	Numeričko deriviranje	359
7.3.5.	Po dijelovima kubična kvazihermiteova interpolacija	364
7.3.6.	Kubična splajn interpolacija	368
7.4.	Interpolacija polinomnim splajnovima — za matematičare	376
7.4.1.	Linearni splajn	377
7.4.2.	Hermiteov kubični splajn	382
7.4.3.	Potpuni kubični splajn	387
7.5.	Diskretna metoda najmanjih kvadrata	398
7.5.1.	Linearni problemi i linearizacija	399

7.5.2.	Matrična formulacija linearnog problema najmanjih kvadrata	404
7.5.3.	Karakterizacija rješenja	405
7.5.4.	Numeričko rješavanje problema najmanjih kvadrata	408
7.6.	Opći oblik metode najmanjih kvadrata	412
7.6.1.	Težinski skalarni produkti	412
7.7.	Familije ortogonalnih funkcija	413
7.8.	Neka svojstva ortogonalnih polinoma	413
7.9.	Trigonometrijske funkcije	418
7.9.1.	Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih funkcija	419
7.10.	Minimaks aproksimacija	427
7.10.1.	Remesov algoritam	432
7.11.	Skoro minimaks aproksimacije	433
7.12.	Interpolacija u Čebiševljevim točkama	437
7.13.	Čebiševljeva ekonomizacija	438
7.14.	Diskretne ortogonalnosti polinoma T_n	441
7.15.	Thieleova racionalna interpolacija	444
8.	Rješavanje nelinearnih jednadžbi	449
8.1.	Općenito o iterativnim metodama	449
8.2.	Metoda raspolavljanja (bisekcije)	450
8.3.	Regula falsi (metoda pogrešnog položaja)	454
8.4.	Metoda sekante	456
8.5.	Metoda tangente (Newtonova metoda)	460
8.6.	Metoda jednostavne iteracije	466
8.7.	Newtonova metoda za višestruke nultočke	471
8.8.	Hibridna Brent–Dekkerova metoda	473
8.9.	Primjeri	473
9.	Numerička integracija	478
9.1.	Općenito o integracijskim formulama	478
9.2.	Newton–Cotesove formule	480

9.2.1.	Trapezna formula	480
9.2.2.	Simpsonova formula	486
9.2.3.	Produljene formule	491
9.2.4.	Primjeri	494
9.2.5.	Formula srednje točke (midpoint formula)	497
9.3.	Rombergov algoritam	498
9.4.	Težinske integracijske formule	507
9.5.	Gaussove integracijske formule	510
9.5.1.	Gauss–Legendreove integracijske formule	515
9.5.2.	Druge Gaussove integracijske formule	526
10.	Obične diferencijalne jednadžbe	534
10.1.	Uvod	534
10.2.	Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu. Eulerova metoda	535
10.3.	Runge–Kuttine metode	536
10.3.1.	Još o koeficijentima za Runge–Kuttine metode	541
10.3.2.	Konvergencija jednokoračnih metoda	543
10.3.3.	Runge–Kutta–Fehlbergove metode. Određivanje koraka integracije.	547
10.4.	Linearne višekoračne metode	550
10.4.1.	Konzistencija i stabilnost	554
10.4.2.	Prediktor-korektor par	559
10.4.3.	Linearne diferencijske jednadžbe	560
10.4.4.	Konvergencija linearnih višekoračnih metoda	563
10.5.	Gearova metoda	570
11.	Optimizacija	579
11.1.	Uvod u optimizaciju	579
11.2.	Metoda zlatnog reza	580
11.3.	Višedimenzionalna minimizacija	582
11.3.1.	Gradijentna metoda	584

11.3.2. Modificirana Newtonova metoda	584
11.4. Kvazi-Newtonove metode	587
11.5. Konvergencija minimizacijskih metoda	595
11.5.1. Konvergencija modificirane Newtonove metode	600
Literatura	603